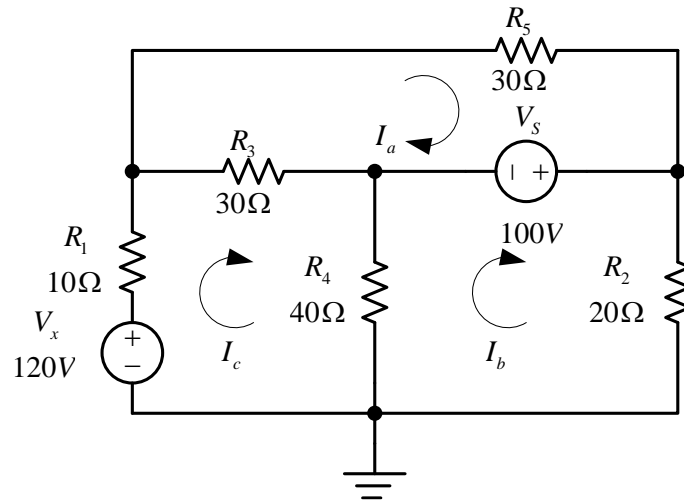


פתרון מועד א' קיץ 23 – תורת החשמל 90611

פתרון לשאלה 1

א. נמיר את מקור הזרם I_S והנגד R_1 שמחובר אליו במקביל למקור מתח V_x עם הנגד R_1 ונסמן את זרמי החוגים כמוצג באיור.



$$V_x = I_S \cdot R_1 = 12 \cdot 10 = 120V$$

נרשום את המטריצות מתוך הסתכלות:

$$\begin{pmatrix} R_3 + R_5 & 0 & -R_3 \\ 0 & R_2 + R_4 & -R_4 \\ -R_3 & -R_4 & R_1 + R_3 + R_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V_s \\ V_s \\ V_x \end{pmatrix}$$

נציב את הערכים ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 30 + 30 & 0 & -30 \\ 0 & 20 + 40 & -40 \\ -30 & -40 & 10 + 30 + 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 \\ 100 \\ 120 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} I_a = 0.116 A \\ I_b = 4.043 A \\ I_c = 3.565 A \end{cases}$$

$$I_{R1} = \frac{V_x - I_c \cdot R_1}{R_1} = \frac{120 - 3.565 \cdot 10}{10} \Rightarrow \boxed{I_{R1} = 8.435 A}$$

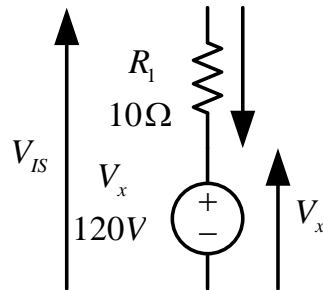
$$\boxed{I_{R2} = I_b = 4.043 A}, \quad I_{R4} = I_b - I_c = 4.043 - 3.565 \Rightarrow \boxed{I_{R4} = 0.478 A}$$

ב.

$$I_{V_S} = I_b - I_a = 4.043 - 0.116 = 3.927 \text{ A}$$

$$P_{V_S} = V_S \cdot I_{V_S} = 100 \cdot 3.927 = 392.7 \text{ W}$$

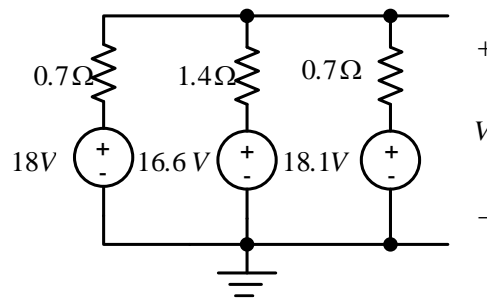
ג.



$$V_{IS} = V_x - I_c \cdot R_1 = 120 - 3.565 \cdot 10 = 84.35 \text{ V}$$

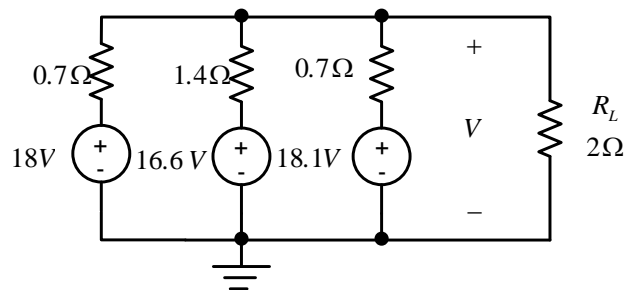
$$P_{IS} = V_{IS} \cdot I_S = 84.35 \cdot 12 = 1012.2 \text{ W}$$

א.



$$\frac{V-18}{0.7} + \frac{V-16.6}{1.4} + \frac{V-18.1}{0.7} = 0 \Rightarrow V = 17.76V$$

ב.



$$\frac{V-18}{0.7} + \frac{V-16.6}{1.4} + \frac{V-18.1}{0.7} + \frac{V}{2} = 0 \Rightarrow V = 15.578V$$

$$I_{R_L} = \frac{V}{R_L} = \frac{15.578}{2} = 7.789A$$

ג. נחשב עבור איזה נגד R_L מתח על ההדקים יהיה נמוך מ- $16.6V$:

$$\frac{16.6-18}{0.7} + \frac{16.6-18.1}{0.7} + \frac{16.6}{R_L} = 0 \Rightarrow R_L = 4\Omega$$

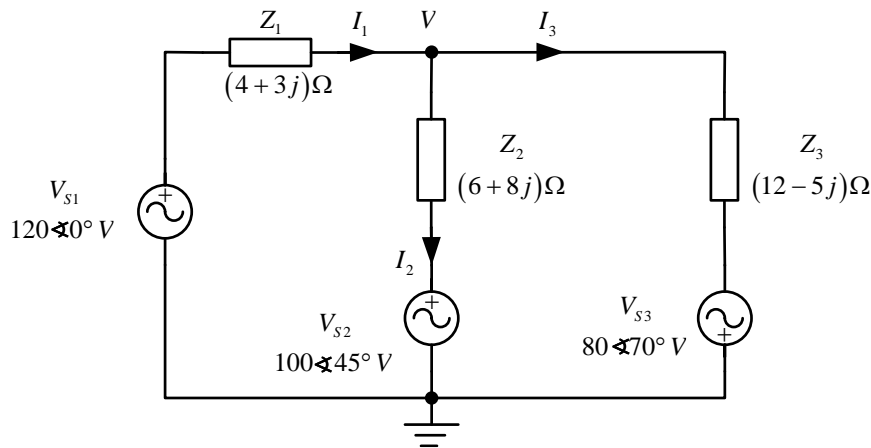
ד. התנגדות הפנימית של הסוללה :

$$R_{TH} = 0.7 \parallel 0.7 \parallel 1.4 = 0.28\Omega$$

העברת אנרגיה (הספק) מכסימלית תהיה כאשר $R_L = R_{TH} = 0.28\Omega$

פתרון לשאלה 3

א. נסמן את המתח בצומת העליונה כ-V כמתואר באיור הבא:



משוואת הזרמים:

$$\frac{V - V_{S1}}{Z_1} + \frac{V - V_{S2}}{Z_2} + \frac{V + V_{S3}}{Z_3} = 0$$

$$\frac{V - 120\angle 0^\circ}{4 + 3j} + \frac{V - 100\angle 45^\circ}{6 + 8j} + \frac{V + 80\angle 70^\circ}{12 - 5j} = 0$$

$$V \cdot \left(\frac{1}{4 + 3j} + \frac{1}{6 + 8j} + \frac{1}{12 - 5j} \right) = \frac{120\angle 0^\circ}{4 + 3j} + \frac{100\angle 45^\circ}{6 + 8j} + \frac{-80\angle 70^\circ}{12 - 5j}$$

$$0.337\angle -30.35^\circ \cdot V = 36.681\angle -36.777^\circ \Rightarrow V = 108.772\angle -6.424^\circ$$

$$I_1 = \frac{V_{S1} - V}{Z_1} = \frac{120\angle 0^\circ - 108.772\angle -6.424^\circ}{4 + 3j} = 3.405\angle 8.74^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{V - V_{S2}}{Z_2} = \frac{108.772\angle -6.424^\circ - 100\angle 45^\circ}{6 + 8j} = 9.092\angle -118.8^\circ \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{V + V_{S3}}{Z_3} = \frac{108.772\angle -6.424^\circ + 80\angle 70^\circ}{12 - 5j} = 11.491\angle 47.565^\circ \text{ A}$$

ב.

$$S_{V_{S1}} = V_{S1} \cdot I_1^* = 120\angle 0^\circ \cdot 3.505\angle -8.74^\circ = 408.6\angle -8.74^\circ \text{ VA}$$

$$S_{V_{S2}} = -V_{S2} \cdot I_2^* = -100\angle 45^\circ \cdot 9.092\angle 118.8^\circ = 909.2\angle 16.2^\circ \text{ VA}$$

$$S_{V_{S3}} = V_{S3} \cdot I_3^* = 80\angle 70^\circ \cdot 11.491\angle -47.565^\circ = 919.28\angle 22.435^\circ \text{ VA}$$

ג.

$$S_{V_{S1}} = 408.6\angle -8.74^\circ \Rightarrow P = 403.85 \text{ W}$$

$$E = P \cdot t = 403.85 \cdot 4 \cdot 60 = 96.924 \text{ kJ}$$

$$E = P \cdot t = 0.403 \cdot \frac{4}{60} = 0.0268 \text{ kWh}$$

פתרון לשאלה 4

א.

$$Y_{ab} = \frac{1}{Z_{ab}} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \frac{[(1 - \omega^2 LC) + j\omega CR](R - j\omega L)}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)}$$

$$Y_{ab} = \frac{1}{Z_{ab}} = \frac{(1 - \omega^2 LC)R - j\omega[L(1 - \omega^2 LC) - R^2 C] + \omega^2 LCR}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$Y_{ab} = \frac{1}{Z_{ab}} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega \frac{(\omega L)^2 C - L + R^2 C}{R^2 + (\omega L)^2}$$

הערה: יש לקבל פתרון חליפי ללא הפיתוח המתמטי אלא בהצגת הביטוי מתוך הנוסחאון

$$Y_{ab} = \frac{1}{Z_{ab}} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega \left(C - \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} \right)$$

ב. בתדירות התהודה העכבה ממשיית לכן נדרש לאפס את החלק המדומה בביטוי המתירות

$$(\omega L)^2 C - L + R^2 C = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{L - R^2 C}{L^2 C}} = \sqrt{\frac{0.01 - 2^2 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}{0.01^2 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}} = 1400 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

הערה: יש לקבל פתרון חליפי ללא הפיתוח המתמטי אלא בהצגת הביטוי מתוך הנוסחאון

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

ג. בתדירות התהודה כאמור העכבה ממשיית (החלק המדומה של המתירות מתאפס)

$$Y_{ab} = \frac{1}{Z_{ab}} = \frac{R}{R^2 + (\omega_0 L)^2} \Rightarrow Z_{ab} = \frac{1}{Y_{ab}} = \frac{R^2 + (\omega_0 L)^2}{R} = \frac{2^2 + (1400 \cdot 0.01)^2}{2} = 100 \Omega$$

ד. בתדירות $\omega = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ היגב הקבל אינסופי (נתק) והיגב הסליל אפס (קצר)

$$Z_{ab} = R = 2 \Omega$$

כאשר העומס הוא התנגדותי מקדם ההספק שווה ל-1 ולכן:

$$\begin{aligned} |I_{L(R)}| &= |I_{ph(R)}|, |I_{L(S)}| = |I_{ph(S)}|, |I_{L(T)}| = |I_{ph(T)}| \\ |I_{L(R)}| &= |I_{L(S)}| = |I_{L(T)}| = |I_L| = |I_{ph}| \\ P_L &= 3 \cdot |V_{ph}| \cdot |I_{ph}| \cdot \cos \varphi = 3 \cdot \frac{|V_L|}{\sqrt{3}} \cdot |I_{ph}| = \sqrt{3} \cdot |V_L| \cdot |I_{ph}| \end{aligned}$$

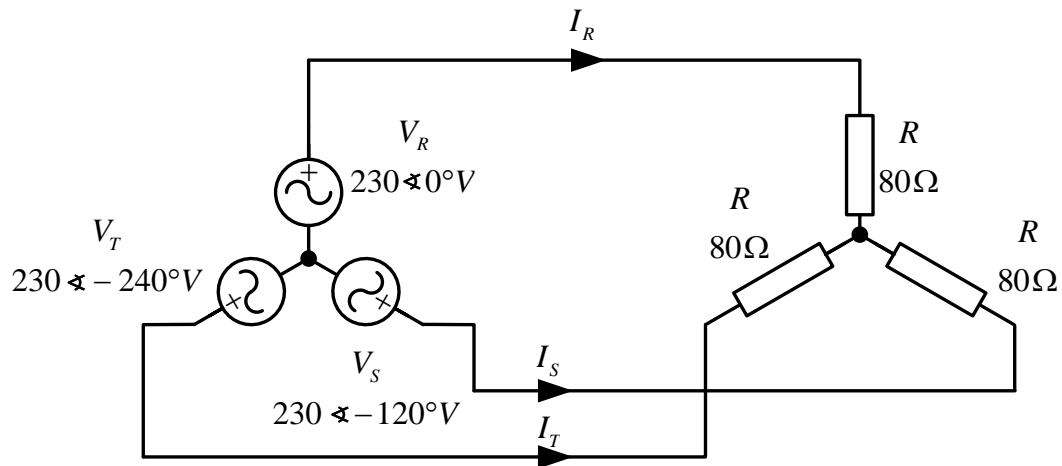
$$|I_{ph}| = |I_L| = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot U_L} = \frac{6000}{\sqrt{3} \cdot 400} = 8.66 \text{ A}$$

הזרם בכל אחד מנגדי העומס קטן פי $\sqrt{3}$ מזרם הקו (הפאזי) ולכן:

$$\begin{aligned} |I_{RS}| = |I_{ST}| = |I_{TR}| &= \frac{|I_L|}{\sqrt{3}} = 5 \text{ A} \\ R = \frac{|V_L|}{|I_{RS}|} &= \frac{400}{5} = 80 \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_R &= 230 \angle 0^\circ \text{ V}, V_S = 230 \angle -120^\circ \text{ V}, V_T = 230 \angle -240^\circ \text{ V} \\ V_{RS} &= V_R - V_S = 230 \angle 0^\circ - 230 \angle -120^\circ = 398.3 \angle 30^\circ \approx 400 \angle 30^\circ \text{ V} \\ V_{ST} &= V_S - V_T = 230 \angle -120^\circ - 230 \angle -240^\circ \approx 400 \angle -90^\circ \text{ V} \\ V_{TR} &= V_T - V_R = 230 \angle -240^\circ - 230 \angle 0^\circ \approx 400 \angle 150^\circ \text{ V} \\ I_{RS} &= \frac{V_{RS}}{R} = \frac{400 \angle 30^\circ}{80} = 5 \angle 30^\circ \text{ A} \\ I_{ST} &= \frac{V_{ST}}{R} = \frac{400 \angle -90^\circ}{80} = 5 \angle -90^\circ \text{ A} \\ I_{TR} &= \frac{V_{TR}}{R} = \frac{400 \angle 150^\circ}{80} = 5 \angle 150^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{L(R)} + I_{TR} &= I_{RS}; I_{L(R)} = I_{RS} - I_{TR} = 5 \angle 30^\circ - 5 \angle 150^\circ = 8.66 \angle 0^\circ \text{ A} \\ I_{L(S)} + I_{RS} &= I_{ST}; I_{L(S)} = I_{ST} - I_{RS} = 5 \angle -90^\circ - 5 \angle 30^\circ = 8.66 \angle -120^\circ \text{ A} \\ I_{L(T)} + I_{ST} &= I_{TR}; I_{L(T)} = I_{TR} - I_{ST} = 5 \angle 150^\circ - 5 \angle -90^\circ = 8.66 \angle 120^\circ \text{ A} \end{aligned}$$



$$V_R = 230 \angle 0^\circ \text{ V} \quad I_R = \frac{V_R}{R} = \frac{230 \angle 0^\circ}{80} = 2.875 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$V_S = 230 \angle -120^\circ \text{ V} \quad I_S = \frac{V_S}{R} = \frac{230 \angle -120^\circ}{80} = 2.875 \angle -120^\circ \text{ A}$$

$$V_T = 230 \angle -240^\circ \text{ V} \quad I_T = \frac{V_T}{R} = \frac{230 \angle -240^\circ}{80} = 2.875 \angle -240^\circ \text{ A}$$

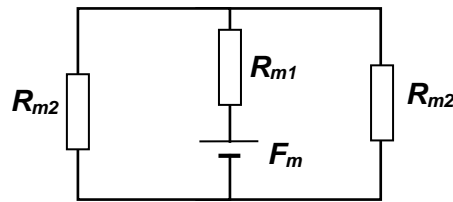
$$P = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 2.875 = 1991.8 \approx 2000 \text{ W}$$

כלומר ההספק קטן פי שלושה.

$$\frac{P_{\square}}{P_Y} = \frac{6000}{2000} = 3, \quad \frac{I_{L\square}}{I_{LY}} = \frac{8.66}{2.875} = 3$$

פתרון לשאלה 6

א. מעגל תמורה + חישובי מיאון



עמוד אמצעי:

$$R_{m1} = \frac{8 \cdot 10^{-2}}{\mu_0 \cdot 1000 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 127.323 \cdot 10^3 \frac{1}{H}$$

עמוד צדדי:

$$R_{m2} = \frac{400 \cdot 10^{-3}}{\mu_0 \cdot 2000 \cdot 200 \cdot 10^{-6}} = 795.774 \cdot 10^3 \frac{1}{H}$$

צמצום:

$$R_T = \frac{R_{m2}}{2} + R_{m1} = 525.211 \cdot 10^3 \frac{1}{H}$$

ב. מספר ליפופים

$$F_m = \Phi \cdot R_T = 0.2m \cdot 525.211 \cdot 10^3 = 105.042 A$$

$$N = \frac{F_m}{I} = \frac{105.042}{0.6} = 175$$

ג. אנרגיה בסליל

$$L = \frac{N^2}{R_T} = \frac{175^2}{525.211 \cdot 10^3} = 58.309 mH$$

$$W_L = \frac{L \cdot I^2}{2} = \frac{58.309m \cdot 0.6^2}{2} = 10.495 mJ$$

ד. שדה מגנטי בכל עמוד

$$B_1 = \frac{\Phi}{A} = \frac{0.2m}{5 \cdot 10^{-4}} = 0.4 T \quad \text{עמוד אמצעי}$$

עמוד צדדי:

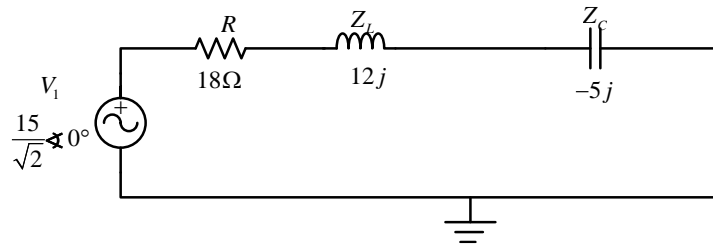
$$\Phi_2 = \frac{0.2m}{2} = 0.1 mWb \quad \Rightarrow \quad B_2 = \frac{0.1m}{200 \cdot 10^{-6}} = 0.5 T$$

פתרון לשאלה 7

א. פתרון בסופרפוזיציה.

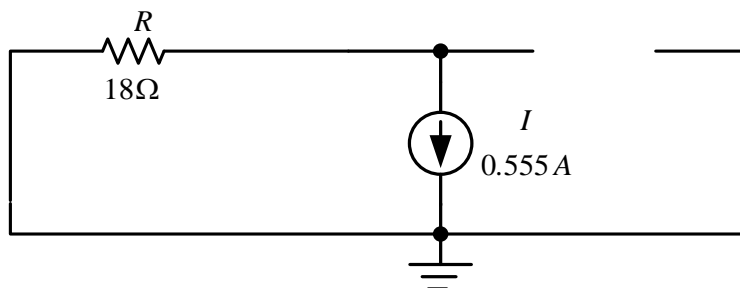
V_1 בלבד:

$$X_L = \omega \cdot L = 12m \cdot 1000 = 12\Omega ; X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{1000 \cdot 200\mu} = 5\Omega$$



$$I_R' = \frac{\frac{15}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{18 + 12j - 5j} = 0.549 \angle -21.25^\circ A$$

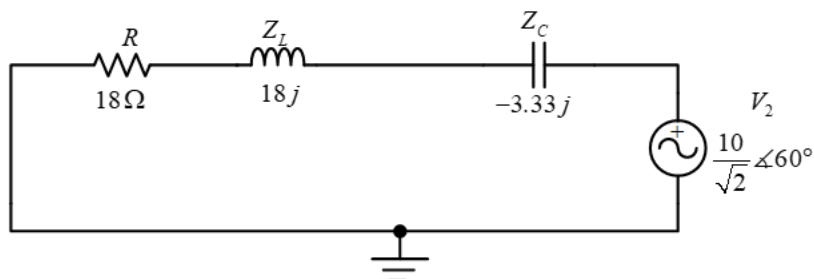
מקור זרם בלבד:



$$I_R = I = 0.555 A$$

מקור V_2 בלבד:

$$X_L = \omega \cdot L = 12m \cdot 1500 = 18\Omega ; X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{1500 \cdot 200\mu} = 3.33\Omega$$



$$I = \frac{-\frac{10}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ}{R + Z_L + Z_C} = \frac{-\frac{10}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ}{18 + 18j - 3.33j} = 0.304 \angle -159.18^\circ \text{ A}$$

$$i(t) = 0.555 + \sqrt{2} \cdot 0.549 \cdot \sin(1000 \cdot t - 21.25^\circ) + \sqrt{2} \cdot 0.304 \cdot \sin(1500 \cdot t - 159.18^\circ) \text{ A}$$

$$I_{avg} = 0.555 \text{ A} \quad \text{ב.}$$

.ג.

$$I_{RMS} = \sqrt{0.549^2 + 0.555^2 + 0.304^2} = 0.837 \text{ A}$$

.ד.

$$P = I_{RMS}^2 \cdot R = 0.871^2 \cdot 18 = 12.63 \text{ W}$$

פתרון לשאלה 8

א. קריאת מד הזרם בזמן $t=0^+$ היא אפס, $I_A = 0 \text{ A}$, כי הסליל לא טעון ומתנהג כמו נתק ברגע הזה.

ב. חישוב האנרגיה האגורה במעגל בתום תופעות המעבר

$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot 16.94 \cdot 0.8 \cdot 10^{-4}}{0.2 \cdot 10^{-3}} = 60 \text{ pF}$$

מחלק מתח :

$$U_{R_1} = \frac{8}{8+4} \cdot 240 = 160 \text{ V}$$

$$U_{R_3} = \frac{5}{5+25} \cdot 240 = 40 \text{ V}$$

$$U_C = U_{R_1} - U_{R_3} = 160 - 40 = 120 \text{ V}$$

$$W_C = \frac{60 \text{ p} \cdot 120^2}{2} = 432 \text{ nJ}$$

התנגדות שקולה של המעגל :

$$R_T = \frac{1}{(8+4)^{-1} + (5+25)^{-1}} = 8.571 \text{ } \Omega$$

$$I_T = \frac{240}{8.571} = 28 \text{ A}$$

$$W_L = \frac{0.4 \text{ n} \cdot 28^2}{2} = 156.8 \text{ nJ}$$

סה"כ אנרגיה אגורה במעגל :

$$W_T = 432 + 156.8 = 588.8 \text{ nJ}$$

ג. מתח הקבל לא משתנה אבל הקיבולת שלו גדלה פי 2 $C = 120 \text{ pF}$

$$Q = C \cdot U = 120 \text{ p} \cdot 120 = 14.4 \text{ nC}$$

ד. גשר וויטסטון מאוזן. התנאי לכך : $R_2 \cdot R_3 = R_1 \cdot R_4$

$$R_2 \cdot 5 = 8 \cdot 25 \quad \rightarrow \quad R_2 = 40 \text{ } \Omega$$